

Zustandsgleichung idealer Gase

1. $p \cdot v = m \cdot R \cdot T$

p =Druck in Pa (Pascal,Newton pro Quadratmeter, N/m^2)

v =Volumen in m^3 (Kubikmeter)

m =Masse in kg (Kilogramm)

R =speziellen Gaskonstante in $J/(kg \cdot T)$ (Joule pro Kilogramm und Kelvin),wird im Labor für jedes Gas ermittelt

T =Temperatur in K (Kelvin) $0^\circ \text{ Celsius}=273,15^\circ \text{ Kelvin}$

2. $p \cdot v = n \cdot R \cdot T$

p =Druck in Pa

v =Volumen in m^3

n =mol (Teilchenzahl,Moleküle) mit $1 \text{ mol}=6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen

$R=8,3144723 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ist die **molare Gaskonstante** nennt man auch **allgemeine Gaskonstante**

Hinweis:Beide Gleichungen können im Temperaturbereich von -20° bis 100° Celsius verwendet werden.Die errechneten Werte weichen aber etwas von den tatsächlichen Werten ab.
Gleichung 1. ist genauer,weil die spezielle Gaskonstante **R** im Labor ermittelt wird.

Herleitung 2.

Zusammenfassung des Boyle-Mariotte-Gesetz $V \sim 1/p$ und Gay-Lussac-Gesetz $p \sim T$

ergibt mathematisch $V \sim 1/p \cdot T$ Man kann hier einmal p =konstant lassen und auch T =konstant lassen
 $V = k \cdot 1/p \cdot T$ ergibt $V \cdot p = k \cdot T$ ergibt $k = V \cdot p / T$

Als Bezugspunkt kann man nun den Normzustand wählen $p=101,325 \text{ kPa}=101325 \text{ Pa}$ und $T=273,15^\circ \text{ K}$ (0° Celsius)

Wir wählen die Stoffmenge (Teilchenzahl) $1 \text{ mol}=6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen

molares Volumen $V_m=22,413996 \text{ l/mol}$ (Liter pro mol) Jedes Gas nimmt im Normzustand dieses Volumen ein !

$V=22,4 \text{ l}=0,0224 \text{ m}^3$

$R=k=0,0224 \text{ m}^3 \cdot 101325 \text{ Pa}/(1 \text{ mol} \cdot 273^\circ \text{ K})=8,313846 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

$p \cdot v = n \cdot R \cdot T$

Einheitenkontrolle: $v \cdot p$ als Einheit $m^3 \cdot N/m^2 = N \cdot m = J$ (Joule) ist die Einheit auf der linken Seite
 $\text{mol} \cdot J/(\text{mol} \cdot T) \cdot T = \text{mol}/\text{mol} \cdot T/T \cdot J = J$ ist die Einheit auf der rechten Seite
 $J=J$ (Joule=Joule) **wahre Aussage**

Man rechnet mit Einheiten,wie mit Zahlen und mit der Einheitenkontrolle kann man so Gleichungen auf Richtigkeit prüfen.

Hinweis:Das Volumen eines Gases vergrößert sich um $1/273$,wenn es um 1° K erwärmt wird,was dann bei der Herleitung der Formel $V=k \cdot T$ hier wurde $0^\circ \text{ Celsius}=273^\circ \text{ Kelvin}$ gesetzt.
Wegen $0^\circ \text{ Celsius}=273,15^\circ \text{ Kelvin}$ ist der Unterschied zu 273° K gering und deshalb auch der Fehler,den man macht,wenn man $0^\circ \text{ Celsius}=273^\circ \text{ Kelvin}$ setzt.

Anwendung

Die Zustandsgleichungen kann man für Zustandsänderungen von Gasen verwenden.
Zustand 1 und Zustand 2

$v \cdot p = m \cdot R \cdot T$ wenn die Masse m und R sich nicht ändert, dann ergibt sich

1. $v_1 \cdot p_1 = m \cdot R \cdot T_1$ Zustand 1
2. $v_2 \cdot p_2 = m \cdot R \cdot T_2$ Zustand 2

1. dividiert durch 2. ergibt $(v_1 \cdot p_1) / (v_2 \cdot p_2) = (m \cdot R) / (m \cdot R) \cdot T_1 / T_2$

$v_1 \cdot p_1 / (v_2 \cdot p_2) = T_1 / T_2$ wenn $p_1 = p_2$ **isobare Zustandsänderung** (Druck bleibt gleich)

$$v_1 / v_2 = T_1 / T_2$$

wenn $v_1 = v_2$ **isochore Zustandsänderung** (Volumen bleibt gleich)

$$p_1 / p_2 = T_1 / T_2$$

Hinweis: Wir haben hier mathematisch eine **Proportion** (Verhältnismessung) vorliegen, wo sich Einheiten aufheben, wie z.Bsp. $12 \text{ kg} / 6 \text{ kg} = 12 / 6 = 2 / 1$

Beispiel

In einem geschlossenen Behälter befindet sich Gas mit $p_1 = 2 \text{ bar}$ und $T_1 = 300^\circ \text{ K}$
Wie hoch ist der Druck p_2 , wenn die Temperatur auf $T_2 = 380^\circ \text{ K}$ erhöht wird?

$$p_1 / p_2 = T_1 / T_2 \text{ ergibt } p_2 = p_1 \cdot T_2 / T_1 = 2 \text{ bar} \cdot 380^\circ \text{ K} / 300^\circ \text{ K} = 2 \text{ bar} \cdot 1,2666.. = \mathbf{2,533.. \text{ bar}}$$

Beispiel

In einem Zylinder mit einem beweglichen Kolben, der den Druck p im Zylinder konstant hält, befinden sich $v_1 = 10 \text{ l}$ Gas unter einem Druck von $p_1 = 2 \text{ bar}$ und einer Temperatur $T_1 = 300^\circ \text{ K}$.
Wie hoch ist der Druck p_2 , wenn sich die Temperatur auf $T_2 = 400^\circ \text{ K}$ erhöht und wie viel Arbeit wird dann vom System abgegeben?

$$v_1 / v_2 = T_1 / T_2 \text{ ergibt } v_2 = v_1 \cdot T_2 / T_1 = 10 \text{ l} \cdot 400^\circ \text{ K} / 300^\circ \text{ K} = 10 \text{ l} \cdot 1,33.. = \mathbf{13,33 \text{ l}}$$

Das Volumen erhöht sich also um $V = 3,33 \text{ l} = 0,00333 \text{ m}^3$ (Kubikmeter)

Aus der Beziehung **$W = F \cdot s$** ergibt sich mit dem Druck $p = 2 \text{ bar} = 200000 \text{ Pa}$ (Pascal, N/m^2 , Newton pro Quadratmeter)

$$p = F / A \text{ ergibt } F = p \cdot A$$

$$\text{Volumen } V = \text{Fläche} \cdot l = A \cdot s \text{ ergibt } s = V / A$$

$$W = F \cdot s = (p \cdot A) \cdot V / A = p \cdot V = 200.000 \text{ N}/\text{m}^2 \cdot 0,00333 \text{ m}^3 = 666 \text{ Nm} = \mathbf{666 \text{ J}} \text{ (Joule)}$$