

Herleitung der Formeln

1) $K(t) = K_0 \cdot (1 + p/100\%)^t$ exponentielle Zunahme

2) $K(t) = K_0 \cdot (1 - p/100\%)^t$ exponentielle Abnahme

K_0 = Anfangswert p = Zinssatz in % t = Laufzeit in Jahre

0 Jahre K_0

1 Jahre $K(1) = K_0 + K_0 \cdot p/100\% = K_0 \cdot (1 + p/100\%)$ Substitution $a = 1 + p/100\%$ wegen der Übersichtlichkeit

2 Jahre $K(2) = K_1 + K_1 \cdot p/100\% = K_0 \cdot a + K_0 \cdot a \cdot p/100\% = K_0 \cdot a \cdot (1 + p/100\%) = K_0 \cdot a^2$
 $K(2) = K_0 \cdot a^2$

3 Jahre $K(3) = K_2 + K_2 \cdot p/100\% = K_0 \cdot a^2 + K_0 \cdot a^2 \cdot p/100\% = K_0 \cdot a^2 \cdot (1 + p/100\%) = K_0 \cdot a^3$
 $K(3) = K_0 \cdot a^3$

usw.

Endformel somit $K(t) = K_0 \cdot (1 + p/100\%)^t$

0 Jahre K_0

1 Jahre $K(1) = K_0 - K_0 \cdot p/100\% = K_0 \cdot (1 - p/100\%)$ mit $a = 1 - p/100\%$

2 Jahre $K(2) = K_1 - K_1 \cdot p/100\% = K_0 \cdot a - K_0 \cdot a \cdot p/100\% = K_0 \cdot a \cdot (1 - p/100\%) = K_0 \cdot a^2$
 $K(2) = K_0 \cdot a^2$

3 Jahre $K(3) = K_2 - K_2 \cdot p/100\% = K_0 \cdot a^2 - K_0 \cdot a^2 \cdot p/100\% = K_0 \cdot a^2 \cdot (1 - p/100\%) = K_0 \cdot a^3$
 $K(3) = K_0 \cdot a^3$

usw.

Endformel somit $K(t) = K_0 \cdot (1 - p/100\%)^t$

Wann hat sich der Wert K_0 verdoppelt ?

$K(t) = K_0 \cdot (1 + p/100\%)^t$ mit $K(t) = K_0 \cdot 2$

$K_0 \cdot 2 = K_0 \cdot (1 + p/100\%)^t$

$2 = (1 + p/100\%)^t$ aus dem Mathe-Formelbuch Logarithmengesetze $\log(u^v) = v \cdot \log(u)$
 $\lg(2) = \lg((1 + p/100\%)^t) = t \cdot \lg(1 + p/100\%)$

$t = \lg(2) / (\lg(1 + p/100\%))$ mit jährlichen Zinssatz oder Preissteigerung $p = 5\%$

$t = \lg(2) / (\lg(1 + 5\%/100\%)) = 14,20..$ Jahre dann hat sich der Preis oder das Anfangskapital verdoppelt

Hinweis: Anstatt des Logarithmus $\lg$ zur Basis 10 kann man auch den natürlichen Logarithmus zur Basis 2,711828.. verwenden

$t = \ln(2) / (\ln(1 + p/100\%))$

Wann hat sich der Wert K_0 halbiert (Inflation) ?

$K(t) = K_0 \cdot (1 - p/100\%)^t$ $K(t) = K_0/2$

$K_0/2 = K_0 \cdot (1 - p/100\%)^t$

$1/2 = (1 - p/100\%)^t$ mit dem Logarithmengesetz $\log(u^v) = v \cdot \log(u)$
 $\lg(1/2) = \lg(1 - p/100\%)^t = t \cdot \lg(1 - p/100\%)$

$t = \lg(1/2) / (\lg(1 - p/100\%))$ mit jährlicher Inflation $p = 5\%$ ergibt

$t = \lg(1/2) / (\lg(1 - 5\%/100\%)) = 13,51$ Jahre dann hat sich der Wert vom Sparguthaben halbiert

mit dem natürlichen Logarithmus $\ln$ ergibt sich analog $t = \ln(1/2) / (\ln(1-p/100\%))$