Herleitung Fadenpendel

Zuerst eine Zeichnung machen mit dem Fadenpendel und den Kräften,die an der Masse m wirken.

1) Fg=Gewichtskraft wirkt senkrecht nach unten Richtung Erdmittelpunkt
2) Fn=Normalkraft,die durch die Zerlegung von Fg entsteht.Diese steht senkrecht auf der Bewegungsbahn und ist nicht an der Bewegung beteiligt.
   Fn leastet nur den Faden auf Zug
3) Ft=Tangentialkraft,die durch die Zerlegung von Fg entsteht.Ft geift tangential an der Masse m an.

Physikalische Grundlage

Eine Masse **m** verharrt in ihrem Bewegungszustand,so lange keine äußere Kraft **F** auf diese Masse einwirkt.Wirkt eine äußere Kraft auf die Masse **m** ein,so reagiert diese mit einer gleich große Gegenkaft **F=m*a** (Trägheitskraft).

Kräftegleichgewicht

Die Summe aller Kräfte in eine Richtung ist zu jedm Zeitpunkt gleich Null.

Daraus ergibt sich die Gleichung **m*a+Ft=0**

m=Masse des P,pendels in kg (Kilogramm)
Ft=Fg*sin(a)=m*g*sin(a) in N (Newton)

m*a+m*g*sin(a)

Trick:für gleiche Winkel gilt **sin(a)=phi=b/r** für Winkel bis (a)=7° b/r=Winkel in Bogenmaß,siehe Mathe-Formelbuch-Geometrie/Winkel
Hier **phi=b/r=b/l** hier l=Länge des Faden in m (Meter) und r=s

Ergibt die Differentialgleichung:**m*a+m*g/l*s=0** dividiert durch m

a+g/l*s=0

a=Beschleunigung ist die 2.te Ableitung des Weges S nach der Zeit t,**a=S´´(t)**
s=zurückgelegter Weg S,ist die gesuchte Weg-Zeit-Funktion,**S(t)**

a=-g/l*s gesucht ist eine Funktion S(t),die 2 mal abgeleitet S´´(t)=-a*S(t)

also wieder die Ausgangsfunktion ergibt.

bekannte Schwingungsgleichungen

1) y=f(x)=a*sin(w*x+b)
2) y=f(x)=a*cos(w*x+b)

Beide Funktionen nach der Kettenregel **f´(x)=z´*f´(z)=innere Ableitung mal äußere Ableitung**

abgeleitet ergibt die Lösungen der Dgl. **a+g/l*s=a+w*s=0**

1) S(t)=w^2*a*sin(w*t)
2) S(t)=w^2*a*cos(w*t)
mit a=1 m maximaler Ausschlag des Fadenpendels ergibt die

Allgemeine Lösung der Dgl. S(t)=C1*sin(w*t)+C2*cos(w*t) nennt man **Linearkombination**

Allgemeine Lösung=Lösung 1+Lösung 2=y1+y2

1) partikuläre (spezielle**) Lösung S(t)=a*sin(w*t)**
2) partikuläre (spezielle) **Lösung S(t)=a*cos(w*t)**

Die speziellen Lösungen ergeben sich durch die Anfangsbedingungen.

1) bei t=0 soll sein S(0)=0=C1*sin(w*0)+C2*cos(w*0)=C1*0+C2*1 also muß C2=0 sein,damit die Gleichung erfüllt wird.
2) bei t=0 soll sein S(0)=1=C1*sin(w*0)+C2*cos(w*0)=C1*0+C2*1 also muß C1=0 sein,damit die Gleichung erfüllt wird

S(t)=a*sin(w*t) nun 2 mal ableiten

S´(t)=a*w*cos(w*t)

S´´(t)=a*w^2*-1*sin(w*t) also **a=S´´´(t)=-1*w^2*sin(w*t) wenn a=1 m**

w^2=g/l

w=+/-Wurzel(g/l)

w=2*pi/T=Kreisfrequenz=Winkelgeschwindigkeit in rad/s (Radiant pro Sekunde)

2*pi=Vollkreis in rad (Bogenmaß)

T=Periodendauer in s (Sekunden) ergibt sich aus der positiven Halbwelle und negative Halbwelle (Hin-und Herschwingung des Fadenpendels)

2*pi/T=Wurzel(g/l)

1/T=1/(2*pi)*Wurzel(g/l)

T=2*pi/Wurzel(g/l) Wurzelgesetz im Mathe-Formelbuch **1/Wurzel(a/b)=Wurzel(b/a)**

T=2*pi*Wurzel(l/g)

T=Periodendauer in s
g=9,81 m/s^2 Erdbeschleunigung (Faden wird als masselos betrachtet)
l=Länge des Faden in m

Hinweis:Die Reibung (Verluste,Luftwiderstand) wird in der Rechnung vernachlässigt

f=1/T in Hz (Hertz) Frequenz=Anzahl der Schwingungen in 1 Sekunden

Einheitenkontrolle: 1 s/1 s=1 ist Dimensionslos,aber man benutzt hier die Einheit Hz (Hertz)

Differentialgleichung der harmonischen gedämpften Schwingungen

siehe Mathe-Formelbuch,Kapitel Differentialgleichungen

Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

a*y´´+b*y´+c*y=0

b*y´=0 wenn keine Dämpfung vorliegt (kein Luftwiderstand,Verluste im Faden ist Null)

a*y´´+c*y=0 hat die selbe Form wie **m*a*+g/l*s=0**

y´´=a=S´´(t) ist die Beschleunigung,2.te Ableitung des Weges s nach der Zeit t
y=S(t) ist der Weg S in Abhängigkeit von der Zeit t Weg-Zeit-Funktion

Lösungen siehe Mathe-Formelbuch.Da braucht man nur abschreiben.