

Analytische Geometrie

Buchtipps: **Mathematik** Analytische Geometrie/Stochastik Band 2 (hat 420 Seiten)
Cornelsen Verlag

ISBN 978-3-06-0004479-9

Dafür habe ich vor ein paar Jahren 45 € bezahlt mit Lösungsbuch.

Das Buch eignet sich sehr gut für ein **Selbststudium** und hat **durchgerechnete Beispielaufgaben**. Wenn man Abitur machen will, dann muss man auf jeden Fall die Aufgaben in diesem Buch rechnen können.

Das Buch hat als Inhalt:

Kapitel Analytische Geometrie:- **LGS** (lineares Gleichungssystem)

- **Vektoren**
- **Geraden**
- **Ebenen**
- **Kreise und Kugeln**

Kapitel Stochastik: wird hier nicht behandelt

notwendige Ausrüstung

Man braucht einen **GTR** (Graphiktaschenrechner), weil die Rechnungen umfangreich sind und in Handarbeit ist das Risiko für Rechenfehler sehr hoch.

Eine einfache Aufgabe erstreckt sich schon mal auf eine halbe DIN A4 Seite und man muss auch ein LGS (lineares Gleichungssystem) lösen.

Ein GTR verrechnet sich nie und den kann man auch programmieren, damit man aufwendige Rechnungen nicht immer in Handarbeit durchführen muss.

Noch besser ist ein **CAS-Rechner** (Computer Algebra System), weil solche Rechner eine 3-D-Darstellung haben und auch Geraden und Ebenen im Raum darstellen können.

Die CAS-Rechner können dann auch Schnittstellen von 2 Geraden berechnen oder die Schnittgerade von 2 Ebenen.

Ich selber habe einen GTR von Casio und der rechnet schon 15 Jahre lang fehlerfrei.

Außerdem braucht man solch einen **GTR oder CAS-Rechner auch im Studium**, sonst hat man schwere Nachteile.

Gerade im Raum

A(ax/ay/az) Großbuchstaben benutzt man für Punkte im Raum

a(ax/ay/az) Kleinbuchstaben benutzt man für Vektoren, über den Buchstaben ist ein kleiner Pfeil, den ich hier nicht darstellen kann.

$\vec{a}(ax/ay/az)$ ist ein Spaltenvektor, den ich auch nicht darstellen kann, a_x und a_y und a_z stehen dabei untereinander.

g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$ die kleinen Pfeile über den Buchstaben fehlen hier

$\vec{a}(ax/ay/az)$ ist der **Stützvektor** (Ortsvektor)

r ist der **Geradenparameter**, nur eine Zahl

$\vec{m}(m_x/m_y/m_z)$ ist der **Richtungsvektor**

Ortsvektor: Der Anfang des Vektors liegt im Ursprung des x-y-z-Koordinatensystems

$a(ax/ay/az)$ ist ein Vektor, der vom Ursprung des x-y-z-Koordinatensystems bis zum Punkt $A(ax/ay/az)$ geht.

Die Spitze des Stützvektors (Ortsvektors) liegt im Punkt $A(ax/ay/az)$

wenn $r=1$ dann geht der Richtungsvektor $m(mx/my/mz)$ zum Punkt $B(bx/by/bz)$

Die Geradengleichung ist somit eine **Vektoraddition von $a(ax/ay/az)$ und $r*m(mx/my/mz)$**

In der Mathematik rechnet man **ohne Einheiten**.

In der Physik muss man die **Einheiten beachten**.

Beispiel Flugzeug

Startpunkt des Flugzeugs im Punkt $A(ax/ay/az)$, Angaben in Meter, z.Bsp. $A(100m/200m/50m)$

Geschwindigkeit $m(mx/my/mz)$, Angaben in m/s (Meter pro Sekunde), z.Bsp.

$m((100\text{ m/s})/(50\text{ m/s})/10\text{ m/s})$

dann muss der Geradenparameter r die Einheit s (Sekunden) haben.

$r=2\text{ s}$ ergibt dann

x-Richtung: $100\text{ m} + 2\text{ s} * 100\text{ m/s} = 100\text{ m} + 200\text{ m} = \mathbf{300\text{ m}}$

y-Richtung: $200\text{ m} + 2\text{ s} * 50\text{ m/s} = 200\text{ m} + 100\text{ m} = \mathbf{300\text{ m}}$

z-Richtung: $50\text{ m} + 2\text{ s} * 10\text{ m/s} = 50\text{ m} + 20\text{ m} = \mathbf{70\text{ m}}$

Bedeutet: Nach 2 Sekunden Flugzeit befindet sich das Flugzeug im Punkt $B(\mathbf{300\text{ m}/300\text{ m}/70\text{ m}})$

$B(bx/by/bz)$ $\mathbf{bx=300\text{ m}}$ (auf der x-Achse), $\mathbf{by=300\text{ m}}$ (auf der y-Achse), $\mathbf{bz=70\text{ m}}$ (auf der z-Achse).

2 Geraden, die sich schneiden

$\mathbf{g: x=a_1+r*m_1}$ und $\mathbf{h: x=a_2+s*m_2}$ gleichgesetzt ergibt $a_1+r*m_1=a_2+s*m_2$

$a_1(a_{1x}/a_{1y}/a_{1z})$ und $m_1(m_{1x}/m_{1y}/m_{1z})$

$a_2(a_{2x}/a_{2y}/a_{2z})$ und $m_2(m_{2x}/m_{2y}/m_{2z})$

x-Richtung: $r*m_{1x}-s*m_{2x}=a_{2x}-a_{1x}$

y-Richtung: $r*m_{1y}-s*m_{2y}=a_{2y}-a_{1y}$

z-Richtung: $r*m_{1z}-s*m_{2z}=a_{2z}-a_{1z}$

dies ist ein LGS mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten r und s , was gelöst werden muss, am besten mit einem GTR

1) $\mathbf{m_{1x}*r-m_{2x}*s=a_{2x}-a_{1x}}$

2) $\mathbf{m_{1y}*r-m_{2y}*s=a_{2y}-a_{1y}}$

3) $\mathbf{m_{1z}*r-m_{2z}*s=a_{2z}-a_{1z}}$

Es gibt 2 Möglichkeiten: - die beiden Geraden schneiden sich, dann gibt es eine **eindeutige Lösung** für **die beiden Parameter r und s** .

r und s erfüllen dann alle 3 Gleichungen

- die beiden Geraden schneiden sich nicht, dann gibt es **keine eindeutige Lösung**.

Es gibt keine Werte für r und s , die alle 3 Gleichungen erfüllen.

Die Behandlung von Ebenen im Raum und die ganzen Rechnungen für die Lagebeziehungen sind so umfangreich, dass die ein kleines Buch füllen würden.

Falls das oben aufgeführte Buch nicht ausreicht und ein Schüler Nachhilfe braucht, dann kann er mich unter meiner E-Mailadresse erreichen.

E-Mail: fjf60@t-online.de

Abstand Punkt-Gerade

Diese Rechnung ist relativ einfach und erfolgt über das **Lotfusspunktverfahren**

gegeben: Ein Punkt, der nicht auf der Geraden **g**: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + r \cdot \mathbf{m}$ liegt **P(x/y/z)**

Man benutzt eine Hilfsebene in der **Normalform**.

Normalengleichung der Ebene: $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$

Der Punkt **P(x/y/z)** liegt auf der Hilfsebene und die Gerade **g**: steht senkrecht auf der Ebene

Man setzt $\mathbf{a}(a_x/a_y/a_z) = \mathbf{a}(x/y/z)$ dies ist der Stützvektor der Ebene. Dieser hat seinen Anfang im Ursprung des x-y-z-Koordinatensystem (ist ein Ortsvektor) und seine Spitze liegt im Punkt **P(x/y/z)**.

Da die Gerade senkrecht auf der Hilfsebene steht, ist der Normalenvektor der Ebene **$\mathbf{n}(n_x/n_y/n_z) = \mathbf{m}(m_x/m_y/m_z)$** gleich dem Richtungsvektor der Geraden.

Also $[\mathbf{x} - \mathbf{P}(x/y/z)] \cdot \mathbf{m} = 0$

Nun setzt man die Gerade in die Gleichung der Hilfsebene ein

$[\mathbf{a} + r \cdot \mathbf{m} - \mathbf{P}(x/y/z)] \cdot \mathbf{m} = 0$

Wir haben hier nun eine Unbekannte, den Geradenparameter **r**, der nun berechnet werden muss.

1) x-Richtung:

2) y-Richtung:

3) z-Richtung:

r muss nun alle 3 Gleichungen erfüllen und damit hat man dann den Schnittpunkt der Geraden mit der Hilfsebene, den **Fusspunkt**.

r in Geradengleichung einsetzen **g**: $(x_2/y_2/z_2) = (a_x/a_y/a_z) + r \cdot (m_x/m_y/m_z)$

Abstand von 2 Punkten im Raum

$d = \text{Betrag Wurzel}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$ mit **P(x₁/y₁/z₁)** und dem Fusspunkt **Pf(x₂/y₂/z₂)**

Das ergibt dann den Abstand Punkt-Gerade.

Eine durchgerechnete Beispielaufgabe findet man in oben angegebenen Buch.

